PART3　三角形の決定

例題

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120^\circ$

(2)　$a=8$，$A=45^\circ$，$C=30^\circ$

Point Pickup

練習

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-1$，$A=135^\circ$

(2)　$c=2$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$

第11講　PART3　確認問題

1 △ABC において，$b=\sqrt{2}$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=45^\circ$ のとき，
残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

$a=$ [ア]，$B=$ [イウ]$^\circ$，$C=$ [エオカ]$^\circ$

2 △ABC において，$a=\sqrt{2}$，$B=135^\circ$，$C=15^\circ$ のとき，
残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

$A=$ [キク]$^\circ$，$b=$ [ケ]，

$c=\sqrt{\text{[コ]}}-$ [サ]

PART3　三角形の決定

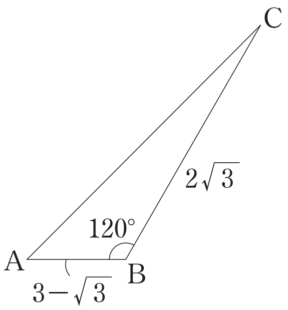
例題

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120^\circ$

(2)　$a=8$，$A=45^\circ$，$C=30^\circ$

(1)　余弦定理より



$$b^2=(3-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos120^\circ$$

$$=9-6\sqrt{3}+3+12-4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=18$$

$b>0$ より　$b=3\sqrt{2}$

正弦定理より

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{3\sqrt{2}}{\sin120^\circ}$$

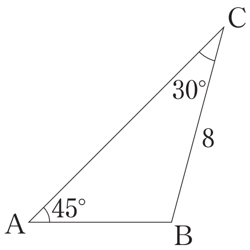
$$\sin A=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\sin120^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$B=120^\circ$ より $A<60^\circ$　　よって $A=45^\circ$

$$C=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$$

(2)　$B=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

正弦定理より



$$\frac{c}{\sin30^\circ}=\frac{8}{\sin45^\circ}$$

$$c=\frac{8}{\sin45^\circ}\cdot\sin30^\circ=8\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{2}$$

余弦定理より

$$(4\sqrt{2})^2=8^2+b^2-2\cdot8\cdot b\cdot\cos30^\circ$$

$$b^2-8\sqrt{3}\,b+32=0\qquad b=4\sqrt{3}\pm4$$

B が最大角より，b が最大辺

よって $b=4\sqrt{3}+4$

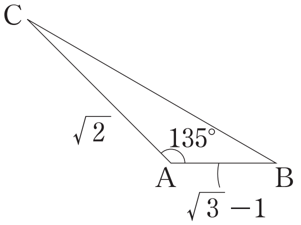
練習

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-1$，$A=135^\circ$

(2)　$c=2$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$

(1)　余弦定理より



$$a^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\cos 135^\circ$$

$$=2+3-2\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4$$

$a>0$ より $a=2$

正弦定理より

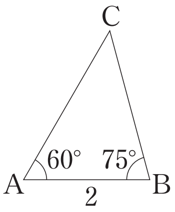
$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 135^\circ}$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$A=135^\circ$ より $B<45^\circ$　　よって $B=30^\circ$

$$C=180^\circ-(135^\circ+30^\circ)=15^\circ$$

(2)　$C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$



正弦定理より

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$a=\frac{2}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ=2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$$

余弦定理より

$$(\sqrt{6})^2=b^2+2^2-2\cdot b\cdot 2\cdot\cos 60^\circ$$

$$b^2-2b-2=0\qquad b=1\pm\sqrt{3}$$

$b>0$ より $b=1+\sqrt{3}$

第 11 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イウ：30，エオカ：105

[解説]

余弦定理より [A]

$$a^2 = (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 45^\circ$$

$$= 2+1+2\sqrt{3}+3-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 4$$

$a>0$ より　$a=\mathbf{2}$

正弦定理より [A]

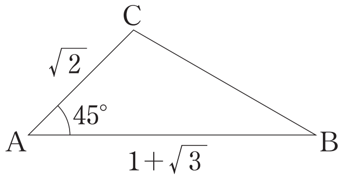
$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$A=45^\circ$ より　$B<135^\circ$

よって　$B=\mathbf{30^\circ}$

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = \mathbf{105^\circ}$$



[A]　三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさから，残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。
- ある辺とその対角がわかる
  ⇒　正弦定理の利用
- 2 辺とその間の角がわかる，3 辺がわかる
  ⇒　余弦定理の利用

2 [正解] キク：30，ケ：2，コ：3，サ：1

[解説]

$A=180°-(135°+15°)=\mathbf{30°}$

正弦定理より [B]

$$\frac{b}{\sin 135°}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30°}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30°}\cdot\sin 135°=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2}$$

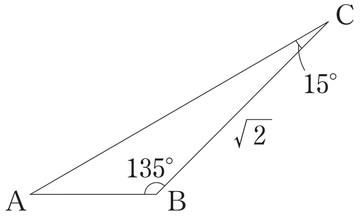
余弦定理より [B]

$$2^2=c^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot c\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135°$$

$$c^2+2c-2=0$$

$$c=-1\pm\sqrt{3}$$

$c>0$ より　$c=\mathbf{\sqrt{3}-1}$



[B]　三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさから，残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。

- ある辺とその対角がわかる
  ⇒　正弦定理の利用
- 2 辺とその間の角がわかる，3 辺がわかる
  ⇒　余弦定理の利用